Mathe

meistern leicht gemacht

10

4. Exponentialgleichungen

Als Exponentialgleichung wird eine Gleichung bezeichnet, in der die gesuchte Variable im Exponenten vorkommt. Solche Gleichungen lassen sich meist nicht sofort lösen, sondern müssen erst mit den Logarithmusgesetzen und den Potenzgesetzen in eine einfachere Form umgewandelt werden.

1. Löse durch geschicktes Umstellen:

a) $20 \cdot 3^{x} = 2^{x+1} \cdot 27$

b) $0{,}5^{x-1} = 2^{x-3}$

c) $5 \cdot 3^{x} = 2^{x-2} \cdot 3^{2x}$

d) $6^{x-1} = 27 \cdot 2^{x-1}$

Substitution

Eine Substitution meint, dass man a^x in einer Exponentialgleichung durch u ersetzt, um so mit z.B. einer quadratischen Gleichung ohne Variable im Exponenten weiterrechnen zu können. Sobald dann die Lösung für u gefunden ist, wird resubstituiert, d. h. dass man die gesuchte Variable x berechnet durch $x = \log_a u$. Wenn u mehrere Lösungen hat, so kann es zu mehreren Lösungen für x kommen. Ein negatives u führt zu keiner Lösung, da a^x niemals negativ werden kann (Definition des Logarithmus).

2. Löse mit Hilfe von Substitution:

a) $9^x - 1 = \frac{6}{3^{2x}}$

b) $4^x + 1 = 17 \cdot 2^{x-2}$

c) $2^{2x+1} = 9 - \frac{9}{4^x}$

d) $2 \cdot 3^x = 50 + 4 \cdot 3^{-x+3}$

e) $\frac{1}{2} \cdot 25^x - 7{,}5 = 5^x$

f) $3^{2x+1} + 9^{-x} = 9\frac{1}{3}$

g) $2^{12x+1} + 4^{2x-0,5} + 4^{2-0,5} = 10 \cdot 256^{x-0,25} + 64^{0,5}$

3. Löse mit Hilfe von Ausklammern

a) $3^3 \cdot 2^x - 2^{x+3} - 2^{x+2} - 7 \cdot 2^x = 2^7$

b) $4^x + 2^{2x+1} + 2^{2x} = 2^6$

c) $\frac{7^x}{5} + 3 \cdot 2^x = 2^{x+3} + 4^{0,5x+1}$

d) $2^{3x+2} + 8^{x+1} = 96 + 6 \cdot 8^x$

e) $2^{3x+7} + 8^{x+\frac{8}{3}} + 2 \cdot 8^{x+2} = 8^3$

f) $3^{x+1} = 54 + 3^{x-1} + 6 \cdot 3^{x-2}$

4. Alles zusammen

a) $2^{x+3} + 4^{0,5x+1} + 2^{x+1} + 16^{0,25x+1} = 2^{2x} + 64 + 10 \cdot 2^x$

b) $25^x = 5^5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 5^{x+1} + 25^{0,5x+1} - 50 \cdot 5^{x-1}$

In Kalifornien ist es gesetzlich verboten einen Schmetterling zu töten oder ihm den Tod anzudrohen

4. Exponentialgleichungen

1.

a)

$$20 \cdot 3^x = 2^{x+1} \cdot 27$$

$$20 \cdot 3^x = 2^x \cdot 2 \cdot 27$$

$$\frac{3^x}{2^x} = \frac{54}{20}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{27}{10}$$

$$x = \log_{1,5} 2{,}7 \approx 2{,}45$$

b)

$$0{,}5^{x-1} = 2^{x-3}$$

$$\frac{0{,}5^x}{0{,}5} = \frac{2^x}{2^3}$$

$$2 \cdot 0{,}5^x = \frac{2^x}{8}$$

$$2 \cdot 8 = \frac{2^x}{0{,}5^x}$$

$$16 = \left(\frac{2}{0{,}5}\right)^x$$

$$16 = 4^x$$

$$x = \log_4 16 = 2$$

c)

$$5 \cdot 3^x = 2^{x-2} \cdot 3^{2x}$$

$$5 \cdot 3^x = \frac{2^x}{2^2} \cdot (3^2)^x$$

$$5 \cdot 3^x = \frac{2^x \cdot 9^x}{4}$$

$$20 = \frac{2^x \cdot 9^x}{3^x}$$

$$20 = \left(\frac{2 \cdot 9}{3}\right)^x$$

$$20 = 6^x$$

$$x = \log_6 20 \approx 1{,}67$$

d)

$$6^{x-1} = 27 \cdot 2^{x-1}$$

$$\frac{6^x}{6} = 27 \cdot \frac{2^x}{2}$$

$$2 \cdot 6^x = 27 \cdot 6 \cdot 2^x$$

$$\frac{6^x}{2^x} = \frac{27 \cdot 6}{2}$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^x = 81$$

$$3^x = 81$$

$$x = \log_3 81 = 4$$

2.

a) $9^x - 1 = \frac{6}{3^{2x}}$

$9^x \cdot 3^{2x} - 1 \cdot 3^{2x} = 6$

$9^x \cdot (3^2)^x - (3^2)^x - 6 = 0$

$9^x \cdot 9^x - 9^x - 6 = 0$

$(9^x)^2 - 9^x - 6 = 0$

$u \coloneqq 9^x$

$u^2 - u - 6 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 5}{2}$$

$u_1 = -2\,; \quad u_2 = 3$

$u_1 : \; -2 = 9^x$

$\rightarrow$!!! *Keine Lösung* 9^x *kann nicht negativ werden* !!!

$u_2 : \; 3 = 9^x \quad \rightarrow \quad x = log_9 3 = 0{,}5$

b) $4^x + 1 = 17 \cdot 2^{x-2}$

$$(2^2)^x + 1 = 17 \cdot \frac{2^x}{2^2}$$

$$2^{2x} + 1 = \frac{17}{4} \cdot 2^x$$

$$(2^x)^2 - \frac{17}{4} \cdot 2^x + 1 = 0$$

$u := 2^x$

$u^2 - 4{,}25u + 1 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-4{,}25) \pm \sqrt{(-4{,}25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$= \frac{4{,}25 \pm 3{,}75}{2}$$

$u_1 = 0{,}25; \quad u_2 = 4$

$u_1\colon \ 0{,}25 = 2^x \quad \rightarrow \quad x_1 = \log_2 0{,}25 = -2$

$u_2\colon \ 4 = 2^x \quad \rightarrow \quad x_2 = \log_2 4 = 2$

c) $\quad 2^{2\mathrm{x}+1} = 9 - \frac{9}{4^{\mathrm{x}}}$

$2^{2x+1} \cdot 4^x = 9 \cdot 4^x - 9$

$2 \cdot 2^{2x} \cdot 4^x = 9 \cdot 4^x - 9$

$2 \cdot (2^2)^x \cdot 4^x = 9 \cdot 4^x - 9$

$2 \cdot 4^x \cdot 4^x - 9 \cdot 4^x + 9 = 0$

$2 \cdot (4^x)^2 - 9 \cdot 4^x + 9 = 0$

$u := 4^x$

$2u^2 - 9u + 9 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$u_1 = 1{,}5\,; \quad u_2 = 3$

$u_1\colon \ 1{,}5 = 4^x \quad \rightarrow \quad x_1 = \log_4 1{,}5 \approx 0{,}29$

$u_2\colon \ 3 = 4^x \quad \rightarrow \quad x_2 = \log_4 3 \approx 0{,}79$

d) $2 \cdot 3^x = 50 + 4 \cdot 3^{-x+3}$

$3^x = 25 + 2 \cdot 3^{-x} \cdot 3^3$

$3^x = 25 + \frac{2 \cdot 27}{3^x}$

$3^x = 25 + \frac{54}{3^x}$

$(3^x)^2 = 25 \cdot 3^x + 54$

$(3^x)^2 - 25 \cdot 3^x - 54 = 0$

$u \coloneqq 3^x$

$u^2 - 25u - 54 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54)}}{2} = \frac{25 \pm 29}{2}$$

$u_1 = -2\,; \quad u_2 = 27$

$u_1: \ -2 = 3^x$
→ !!! *Keine Lösung* 3^x *kann nicht negativ werden* !!!

$u_2: \ 27 = 3^x \quad \rightarrow \quad x = \log_3 27 = 3$

e) $0{,}5 \cdot 25^{\mathrm{x}} - 7{,}5 = 5^{\mathrm{x}}$

$0{,}5 \cdot (5^2)^x - 7{,}5 = 5^x$

$0{,}5 \cdot 5^{2x} - 7{,}5 = 5^x$

$0{,}5 \cdot (5^x)^2 - 5^x - 7{,}5 = 0$

$u \coloneqq 5^x$

$0{,}5u^2 - u - 7{,}5 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-7{,}5)}}{2 \cdot 0{,}5} = 1 \pm 4$$

$u_1 = -3\,; \quad u_2 = 5$

$u_1\colon\ -3 = 5^x$
$\rightarrow$!!! *Keine Lösung* 5^x *kann nicht negativ werden* !!!

$u_2\colon\ 5 = 5^x \quad \rightarrow \quad x = \log_5 5 = 1$

f) $3^{2x+1} + 9^{-x} = 9\frac{1}{3}$

$$3 \cdot 3^{2x} + \frac{1}{9^x} = 9\frac{1}{3}$$

$$3 \cdot (3^2)^x \cdot 9^x + 1 = 9\frac{1}{3} \cdot 9^x$$

$$3 \cdot (9^x)^2 - 9\frac{1}{3} \cdot 9^x + 1 = 0$$

$u \coloneqq 9^x$

$$3u^2 - 9\frac{1}{3}u + 1 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-\left(-9\frac{1}{3}\right) \pm \sqrt{(-9\frac{1}{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{9\frac{1}{3} \pm \frac{26}{3}}{6}$$

$u_1 = \frac{1}{9}\,; \quad u_2 = 3$

$u_1\colon\ \frac{1}{9} = 9^x \quad \rightarrow \quad x_1 = \log_9 \frac{1}{9} = -1$

$u_2\colon\ 3 = 9^x \quad \rightarrow \quad x_2 = \log_9 3 = 0{,}5$

g) $2 \cdot 2^{12x} + \frac{1}{2} \cdot 4^{2x} + 8 = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot 256^{x} + 8$

$2 \cdot 2^{4 \cdot 3x} + 0{,}5 \cdot 16^{x} = 2{,}5 \cdot 16^{2x}$

$2 \cdot (16^{x})^{3} + 0{,}5 \cdot 16^{x} = 2{,}5 \cdot (16^{x})^{2}$

$2 \cdot (16^{x})^{2} - 2{,}5 \cdot (16^{x}) + 0{,}5 = 0$

$u \coloneqq 16^{x}$

$2u^{2} - 2{,}5u + 1{,}5 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-2{,}5) \pm \sqrt{(-2{,}5)^{2} - 4 \cdot 2 \cdot 0{,}5}}{2 \cdot 2} = \frac{2{,}5 \pm 1{,}5}{4}$$

$u_{1} = 1\,; \quad u_{2} = \frac{1}{4}$

$u_{1}\colon\ \frac{1}{4} = 16^{x} \quad \rightarrow \quad x = lo\,g_{16}\frac{1}{4} = 0{,}5$

$u_{2}\colon\ 1 = 16^{x} \quad \rightarrow \quad x = lo\,g_{16}\,1 = 0$

3.

a) $3^{3} \cdot 2^{x} - 2^{x+3} - 2^{x+2} - 7 \cdot 2^{x} = 2^{7}$

$27 \cdot 2^{x} - 8 \cdot 2^{x} - 4 \cdot 2^{x} - 7 \cdot 2^{x} = 2^{7}$

$2^{x}(27 - 8 - 4 - 7) = 2^{7}$

$8 \cdot 2^{x} = 2^{7}$

$2^{x} = \frac{2^{7}}{8}$

$2^{x} = 2^{4}$

$x = 4$

b) $4^x + 2^{2x+1} + 2^{2x} = 2^6$

$(2^2)^x + 2 \cdot 2^{2x} + 2^{2x} = 2^6$

$2^{2x}(1 + 2 + 1) = 2^6$

$4 \cdot 2^{2x} = 2^6$

$2^{2x} = \frac{2^6}{4}$

$2^{2x} = 2^4$

$x = 2$

c) $\frac{7^x}{5} + 3 \cdot 2^x = 2^{x+3} + 4^{0,5x+1}$

$7^x + 15 \cdot 2^x = 5 \cdot 8 \cdot 2^x + 5 \cdot 4 \cdot 2^x$

$7^x = 40 \cdot 2^x + 20 \cdot 2^x - 15 \cdot 2^x$

$7^x = 45 \cdot 2^x$

$\frac{7^x}{2^x} = 45$

$\left(\frac{7}{2}\right)^x = 45$

$x = lo\,g_{3,5}\,45 \approx 3,04$

d) $2^{3x+2} + 8^{x+1} = 96 + 6 \cdot 8^x$

$2^2 \cdot 2^{3x} + 8 \cdot 8^x = 96 + 6 \cdot 8^x$

$4 \cdot (2^3)^x + 8 \cdot 8^x - 6 \cdot 8^x = 96$

$4 \cdot 8^x + 8 \cdot 8^x - 6 \cdot 8^x = 96$

(→)

$$8^x(4+8-6)=96$$

$$6\cdot 8^x=96$$

$$8^x=16$$

$$x=\log_8 16=\frac{4}{3}$$

e) $2^{3x+7}+8^{x+\frac{8}{3}}+2\cdot 8^{x+2}=8^3$

$$2^7\cdot(2^3)^x+8^{\frac{8}{3}}\cdot 8^x+2\cdot 8^2\cdot 8^x=8^3$$

$$128\cdot 8^x+256\cdot 8^x+128\cdot 8^x=8^3$$

$$8^x(128+256+128)=8^3$$

$$8^x\cdot 512=512$$

$$8^x=1$$

$$x=\log_8 1=0$$

f) $3^{x+1}=54+3^{x-1}+6\cdot 3^{x-2}$

$$3\cdot 3^x-\frac{1}{3}\cdot 3^x-6\cdot\frac{1}{9}\cdot 3^x=54$$

$$3^x\left(3-\frac{1}{3}-\frac{6}{9}\right)=54$$

$$2\cdot 3^x=54$$

$$3^x=27$$

$$x=\log_3 27=3$$

4.

a) $2^{x+3} + 4^{0,5x+1} + 2^{x+1} + 16^{0,25x+1} = 2^{2x} + 64 + 10 \cdot 2^x$

$2^3 \cdot 2^x + 4 \cdot 4^{0,5x} + 2 \cdot 2^x + 16 \cdot 16^{0,25x} =$

$= 2^{2x} + 64 + 10 \cdot 2^x$

$8 \cdot 2^x + 4 \cdot (4^{0,5})^x + 2 \cdot 2^x + 16 \cdot (16^{0,25})^x =$

$= 2^{2x} + 64 + 10 \cdot 2^x$

$8 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x + 16 \cdot 2^x - 10 \cdot 2^x = 2^{2x} + 64$

$2^x(8 + 4 + 2 + 16 - 10) = 2^{2x} + 64$

$20 \cdot 2^x = 2^{2x} + 64$

$(2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$

$u \coloneqq 2^x$

$u^2 - 16u + 64 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 12}{2}$$

$u_1 = 16\,; \quad u_2 = 4$

$u_1\colon\ 16 = 2^x \quad \rightarrow \quad x_1 = \log_2 16 = 4$

$u_2\colon\ 4 = 2^x \quad \rightarrow \quad x_2 = \log_2 4 = 2$

b) $25^x = 5^5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 5^{x+1} + 25^{0,5x+1} - 50 \cdot 5^{x-1}$

$25^x = 12500 + 2 \cdot 5 \cdot 5^x + 25 \cdot 25^{0,5x} - 50 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5^x$

$25^x = 12500 + 10 \cdot 5^x + 25 \cdot (25^{0,5})^x - 10 \cdot 5^x$

$25^x = 12500 + 10 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x - 10 \cdot 5^x$

$5^{2x} = 12500 + 5^x(10 + 25 - 10)$

$(5^x)^2 = 12500 + 25 \cdot 5^x$

$(5^x)^2 - 25 \cdot 5^x - 12500 = 0$

$u \coloneqq 5^x$

$u^2 - 25u - 12500 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12500)}}{2 \cdot 1} = \frac{25 \pm 225}{2}$$

$u_1 = -100\,; \quad u_2 = 125$

$u_1: \; -100 = 5^x$

$\rightarrow$!!! *Keine Lösung* 5^x *kann nicht negativ werden* !!!

$u_2: \; 125 = 5^x \quad \rightarrow \quad x = \log_5 125 = 3$